ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. При пуске в ход электрической лебёдки к барабану B приложен вращающий момент, пропорциональный времени $M = kt$. Груз A массы m поднимается при помощи каната, намотанного на барабан (Рис. 1). Определить угловую скорость барабана. Барабан считать однородным сплошным цилиндром массы m_1 радиусом r. В начальный момент система находилась в покое.

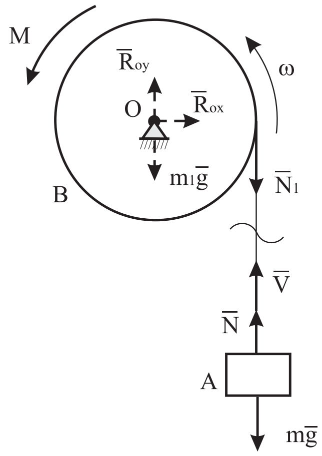


Рис. 1

Рассмотрим движение каждого тела в отдельности. Силовые и кинематические схемы изображены на Рис. 1. Тело A движется поступательно и прямолинейно. Записывая теорему о движении центра масс в проекциях на вертикаль, получаем:

$$m\frac{dv}{dt} = N - mg.$$

Дифференциальное уравнение вращательного движения для тела B представляется в виде:

$$\frac{m_1 r^2}{2}\frac{d\omega}{dt} = M - N_1 r.$$

Поскольку масса троса не учитывается, $N = N_1$. Скорость любой точки на ободе барабана равна скорости груза, следовательно, $v = \omega r$.

Исключая из полученной системы уравнений N, N_1 и v, получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{(2m + m_1)r^2}{2}\frac{d\omega}{dt} = M - mgr,$$

интегрируя которое при заданных начальных условиях

$$\frac{(2m + m_1)r^2}{2}\int\limits_0^{\omega} d\omega = \int\limits_0^{t}(kt - mgr)dt,$$

находим:

$$\omega = \frac{kt^2 - 2mgrt}{(2m + m_1)r^2}.$$

Пример 2. Колесо массы m радиуса r катится по горизонтальному прямолинейному рельсу. К колесу приложен вращающий момент M (Рис. 2). Радиус инерции колеса относительно оси, проходящей через его центр масс перпендикулярно его плоскости, равен ρ. Коэффициент трения скольжения между колесом и рельсом равен f. Какому условию должен удовлетворять вращающий момент, чтобы колесо катилось без проскальзывания? Моментом сопротивления качению пренебречь.

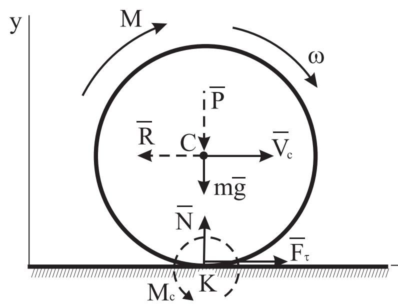


Рис. 2

В зависимости от приложенной активной нагрузки различают ведущие и ведомые колёса. В данной задаче рассматривается ведущее колесо, поскольку к нему приложен вращающий момент. Силовая и кинематическая схемы изображены на Рис. 2. Обратим внимание на направление силы трения $\vec{F}_\tau$. Сила трения направлена против скорости возможного проскальзывания своей точки приложения — точки K. Если колесо пробуксовывает, то скорость точки K направлена влево, а сила трения, соответственно, вправо — в сторону движения оси колеса. Ряд сил на чертеже изображён пунктиром — это составляющие реакции корпуса экипажа, представленные силами $\vec{P}$ и $\vec{R}$. Эти силы присутствуют в реальной ситуации, но при решении данной задачи мы не будем их учитывать. Моментом сопротивления качению M_c также пренебрегаем. Таким образом, реакция экипажа сводится в данной задаче к паре сил, создающей вращающий момент M.

Уравнения плоско–параллельного движения тела (**??**) и (**??**) в рассматриваемом случае принимают вид:

$$m\frac{dv_c}{dt} = F_\tau; \qquad 0 = N - mg; \qquad J_c\frac{d\omega}{dt} = M - F_\tau r.$$

Предположим, что колесо катится без проскальзывания. Тогда точка касания K колеса и опорной проверхности будет для колеса мгновенным центром скоростей и, следовательно,

$$v_c = \omega \cdot CK = \omega r.$$

Возникающая при этом сила трения будет силой трения покоя, т.е. будет удовлетворять условию:

$$F_\tau \leq F_{\tau\, max} = fN.$$

Определяя из системы уравнений силу трения $\vec{F}_\tau$ и нормальную реакцию $\vec{N}$

$$F_\tau = \frac{Mmr}{J_c + mr^2} = \frac{Mr}{r^2 + \rho^2}; \qquad N = mg$$

и подставляя полученные результаты в неравенство, находим условия, при которых возможно качение ведущего колеса без проскальзывания:

$$M \leq fmg\frac{r^2 + \rho^2}{r}.$$

Пример 3. Каток массы m_1 радиуса r_1 катится без проскальзывания по горизонтальной поверхности под действием приложенного к нему постоянного вращающего момента M. Трос, намотанный на боковую поверхность катка, сходит с него горизонтально и попадает на неподвижный блок массы m_2 и радиуса r_2 (Рис. 3). К свободному концу троса привязан груз массы m_3. Считая каток и блок сплошными однородными цилиндрами определить скорость оси катка $v(t)$. если в начальный момент времени система находилась в покое.

Рассматривая движение каждого из тел системы в отдельности, записываем:
теорему о движении центра масс катка в проекциях на горизонтальное направление:

$$m_1\frac{dv}{dt} = F_\tau - N_{12};$$

дифференциальное уравнение вращательного движения катка:

$$J_1\frac{d\omega_1}{dt} = M - F_\tau r_1 - N_{12}r_1;$$

дифференциальное уравнение вращательного движения блока:

$$J_2\frac{d\omega_2}{dt} = N_{21}r_2 - N_{23}r_2;$$

и теорему о движении центра масс груза в проекциях на вертикальное направление:

$$m_3\frac{dv_3}{dt} = N_{32} - m_3 g.$$

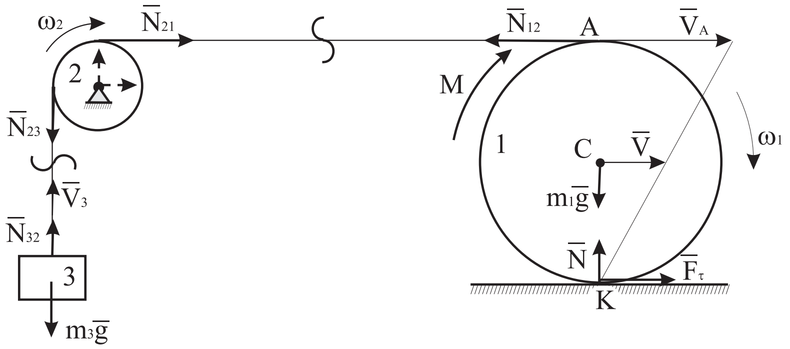


Рис. 3

Учитывая очевидные кинематические соотношения:

$$\omega_1 = \frac{v}{r_1}; \qquad \omega_2 = \frac{v_A}{r_2} = 2\frac{v}{r_2}; \qquad v_3 = 2v,$$

а также тот факт, что

$$J_1 = \frac{m_1 r_1^2}{2}; \quad J_2 = \frac{m_2 r_2^2}{2} \quad \text{и} \quad N_{12} = N_{21}; \quad N_{23} = N_{32},$$

получаем дифференциальное уравнение:

$$(3m_1 + 4m_2 + 8m_3)\frac{dv}{dt} = \frac{2M}{r_1} - 4m_3 g,$$

интегрируя которое при нулевых начальных условиях, находим:

$$(3m_1 + 4m_2 + 8m_3)v = \left(\frac{2M}{r_1} - 4m_3 g\right) t.$$

Пример 4. Колесо A скатывается без проскальзывания по наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтом. К оси колеса привязан трос, переброшенный через неподвижный блок C и прикреплённый к грузу B, поднимающемуся по наклонной плоскости, образующей угол β с горизонтом (Рис.62). В начальный момент система находилась в покое. Колесо и блок представляют собой сплошные однородные диски с массами m_1 и m_3 и радиусами r_1 и r_3 соответственно. Масса груза равна m_2. Коэффициент трения между грузом и наклонной плоскостью равен f. Определить скорость оси колеса, натяжение троса на участках AC и BC, реакцию оси блока C.

Рассмотрим движение каждого из трёх тел в отдельности. Силовые схемы представлены на Рис. 4.

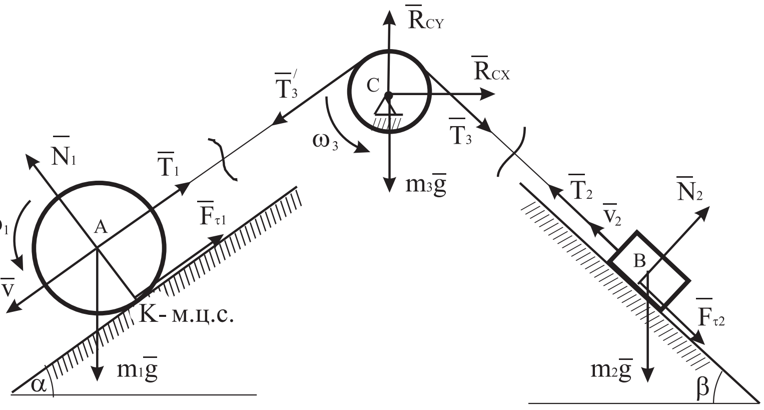


Рис. 4

Колесо совершает плоско–параллельное движение. Одну из осей координат направим вниз по наклонной плоскости (в сторону движения центра колеса). Дифференциальные уравнения движения (**??**) и (**??**) имеют вид:

$$m_1 \frac{dv}{dt} = m_1\, g\, \sin\alpha - F_{\tau 1} - T_1; \qquad (a)$$

$$0 = N_1 - m_1\, g\, \cos\alpha; \qquad (b)$$

$$J_1 \frac{d\omega_1}{dt} = F_{\tau 1}\, r_1. \qquad (c)$$

Груз B движется поступательно:

$$m_2 \frac{dv_2}{dt} = T_2 - m_2\, g\, \sin\beta - F_{\tau 2}; \qquad (d)$$

$$0 = N_2 - m_2\, g\, \cos\beta. \qquad (e)$$

Тело C вращается вокруг неподвижной оси:

$$J_3 \frac{d\omega_3}{dt} = T_3' r_3 - T_3\, r_3. \qquad (g)$$

Приведённую систему уравнений необходимо дополнить кинематическими соотношениями:

$$v = \omega_1\, AK = \omega_1\, r_1; \qquad v = \omega_3\, r_3; \qquad v = v_2. \qquad (k)$$

Поскольку масса троса не учитывается, то

$$T_1 = T_3'; \qquad T_2 = T_3. \qquad (l)$$

Сила трения скольжения между грузом и опорной поверхностью определяется по формуле:

$$F_{\tau 2} = f\,N_2. \qquad (m)$$

Для определения реакции оси блока C используем теорему о движении центра масс (применительно к блоку C):

$$\begin{aligned} 0 &= R_{cx} + T_3\,\cos\beta - T_3'\,\cos\alpha; \\ 0 &= R_{cy} - T_3\,\sin\beta - T_3'\,\sin\alpha - m_3 g. \end{aligned} \qquad (p)$$

При решении полученной системы уравнений, прежде всего необходимо определить скорость оси колеса. Используя уравнения $(a), (c)$ и первое из уравнений (k), получаем:

$$\frac{3}{2}\,m_1\,\frac{dv}{dt} = m_1\,g\,\sin\alpha - T_1. \qquad (q)$$

Используя уравнения $(d), (e), (m)$ и третье из уравнений (k), получаем:

$$m_2\,\frac{dv}{dt} = T_2 - m_2\,g\,(\sin\beta + f\,\cos\beta). \qquad (r)$$

С учётом уравнений (l) и второго уравнения (k), из (g) получаем:

$$\frac{m_3}{2}\,\frac{dv}{dt} = T_1 - T_2. \qquad (s)$$

Складывая уравнения $(q), (r), (s)$, получаем:

$$\frac{3m_1 + 2m_2 + m_3}{2} \cdot \frac{dv}{dt} = [m_1\,\sin\alpha - m_2\,(\sin\beta + f\,\cos\beta)]\;g. \qquad (h)$$

Из уравнения (h) находим ускорение центра A колеса:

$$w = \frac{dv}{dt} = \frac{2g\,[m_1 \sin\alpha - m_2\,(\sin\beta + f\cos\beta)]}{3m_1 + 2m_2 + m_3} = const.$$

Интегрируя по времени при нулевых начальных условиях, определяем скорость центра A колеса:

$$v = wt = \frac{2gt\,[m_1 \sin\alpha - m_2\,(\sin\beta + f\cos\beta)]}{3m_1 + 2m_2 + m_3}.$$

Подставляя ускорение w центра колеса в уравнения (q) и (r), определяем натяжение троса на участках AC и BC:

$$T_1 = T_3' = m_1 g \sin\alpha - \frac{3}{2} m_1 w;$$

$$T_2 = T_3 = m_2 w + m_2 g\left(\sin\beta + f\cos\beta\right).$$

Из уравнений (p) определяем реакцию шарнира C блока:

$$R_{cx} = m_1\left(g\sin\alpha - \frac{3}{2}w\right) - m_2\left[w + g\left(\sin\beta + f\cos\beta\right)\right]\cos\beta;$$

$$R_{cy} = m_3 g + m_2\left[w + g\left(\sin\beta + f\cos\beta\right)\right]\sin\beta + m_1\left(g\sin\alpha - \frac{3}{2}w\right)\sin\beta.$$

Пример 5. При условиях задачи, рассмотренной в примере 4, определить зависимость скорости оси колеса v от числа оборотов n блока C.

Начальная кинетическая энергия системы равна нулю. Система состоит из трёх абсолютно твёрдых тел и нерастяжимого троса, поэтому суммарная работа всех внутренних сил также равна нулю. При таких условиях кинетическая энергия системы в любой момент времени равна сумме работ внешних сил, совершённых к этому моменту времени :

$$T = \sum_{k=1}^{n} A_k^e.$$

Найдём кинетическую энергию системы:

$$T = T_A + T_B + T_C = \frac{1}{2}J_1\,\omega_1^2 + \frac{1}{2}m_1\,v^2 + \frac{1}{2}m_2\,v_2^2 + \frac{1}{2}J_3\,\omega_3^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{m_1\,r_1^2}{2}\cdot\frac{v^2}{r_1^2} + m_1 v^2 + m_2\,v^2 + \frac{m_3\,r_3^2}{2}\cdot\frac{v^2}{r_3^2}\right] = \frac{1}{4}(3m_1 + 2m_2 + m_3)\,v^2.$$

При вычислении работы внешних сил заметим, что сила трения $F_{\tau 1}$ работу не совершает, поскольку точка приложения этой силы K в любой момент времени имеет нулевую скорость. Перемещения точек связаны между собой соотношениями (Рис. 5):

$$s_1 = s_2 = s_3 = s = r_3\,\varphi_3 = 2\pi\,r_3\,n;$$

$$h_1 = s_1\,\sin\alpha = s\,\sin\alpha; \qquad h_2 = s_2\,\sin\beta = s\,\sin\beta.$$

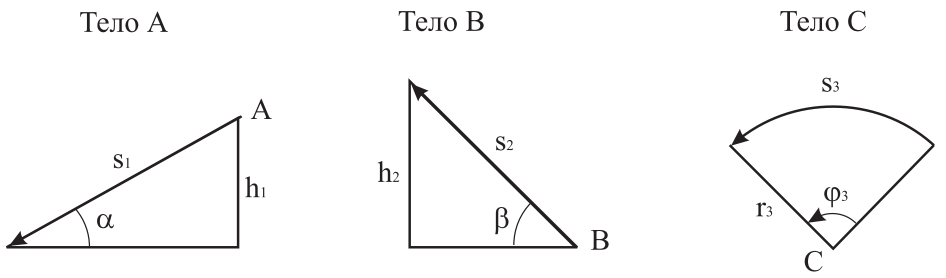


Рис. 5

Вычислим работу внешних сил:

$$\sum_{k=1}^{n} A_k^e = A(m_1\,\vec{g}) + A(m_2\,\vec{g}) + A(\vec{F}_{\tau 2}) = m_1\,g\,h_1 - m_2\,g\,h_2 - F_{\tau 2}\,s_2 =$$

$$= m_1\,g\,s\,\sin\alpha - m_2\,g\,s\,\sin\beta - f\,N_2 s = 2\pi\,N r_3 g[m_1 \sin\alpha - m_2(\sin\beta + f\cos\beta)].$$

Возвращаясь к теореме об изменении кинетической энергии, находим:

$$v = \sqrt{\frac{8\pi N\,r_3\,g\,[m_1\,\sin\alpha - m_2\,(\sin\beta + f\,\cos\beta)]}{3m_1 + 2m_2 + m_3}}.$$

Задание

Механическая система состоит из четырёх цилиндров, связанных между собой нерастяжимыми тросами. Каток 1 массы $m_1 = 4m$ радиуса $r_1 = 3/2\,r$ катится без проскальзывания по неподвижной плоскости, наклонённой под углом $\alpha = 30^o$ к горизонту. Блоки 2 и 3 — одинаковые сплошные однородные сдвоенные цилиндры массы $m_2 = m_3 = 20m$ с внутренним радиусом $r_2 = r_3 = r$ и наружным радиусом $R_2 = R_3 = 2r$. Даны радиусы инерции цилиндров

$$\rho_2^2 = \rho_3^2 = \frac{3}{2}r^2.$$

Величины m и r считаются заданными.

Система приводится в движение из состояния покоя моментом $M(t)$, приложенным к катку 1.

1. Используя общие теоремы динамики, составить систему уравнений, описывающих движение заданной механической системы. Исключая из этой системы уравнений внутренние силы, получить дифференциальное уравнение, служащее для определения зависимости $s(t)$ координаты точки A от времени - дифференциальное уравнение движения системы.

2. Получить то же самое дифференциальное уравнение движения системы, используя теорему об изменении кинетической энергии в дифференциальной форме.

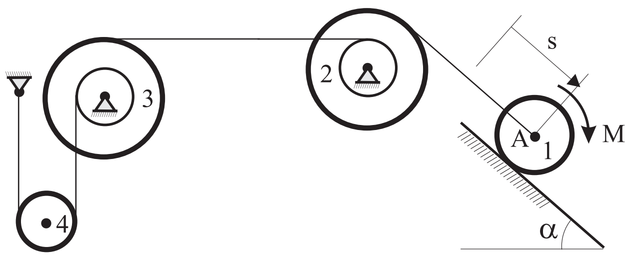


Рис. 6

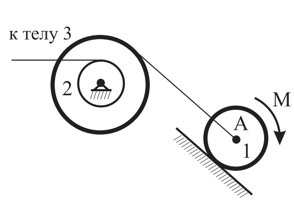
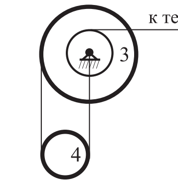
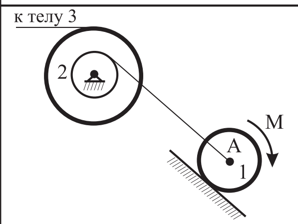
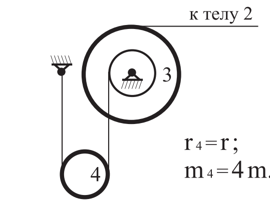
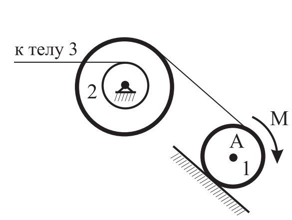
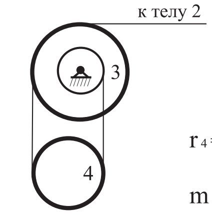
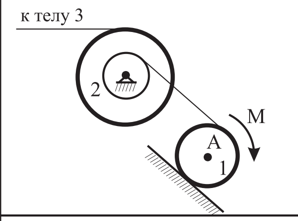
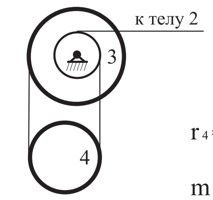
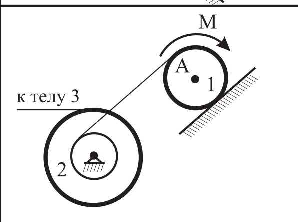
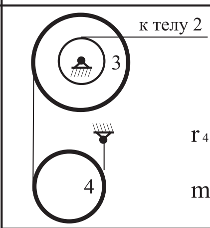
5. Убедившись в совпадении результатов, полученных четырьмя независимыми способами, проинтегрировать дифференциальное уравнение движения системы, получив зависимость $s(t)$ координаты точки А от времени.

6. Построить графики зависимостей $M(t)$ и $s(t)$.

7. Определить натяжения тросов в начальный момент времени (при $t = 0$.

Варианты схем и зависимость вращающего момента от времени приведены в Таблице.

Таблица

№	Схема соединения тел 1 и 2	Схема соединения тел 3 и 4	Вращающий момент
1		 $r_4=r$; $m_4=4m$.	$M=M_0\frac{t+2}{t+1}$
2		 $r_4=r$; $m_4=4m$.	$M=M_0(1+e^{-t})$
3		 $r_4=\frac{3}{2}r$; $m_4=9m$.	$M=M_0\frac{(t+1)^2+1}{(t+1)^2}$
4		 $r_4=\frac{3}{2}r$; $m_4=9m$.	$M=M_0\left[1+\frac{1}{(t+1)^3}\right]$
5		 $r_4=\frac{3}{2}r$; $m_4=9m$.	
6